

## TEMA 18

# TEORÍA COMBINATORIA

La Combinatoria es una rama de las matemáticas cuyo objeto es estudiar las posibles agrupaciones de objetos que podemos llevar a cabo de un modo rápido teniendo en cuenta las relaciones que deben existir entre ellas.

Por ejemplo:

Con 5 colores diferentes ¿cuántas banderas tricolores podemos hacer? Una bandera de otra se diferencia en tener un color diferente o en el orden de colocación de los colores.



Estas 3 banderas son diferentes y pertenecen a Luxemburgo, Rusia y Yugoslavia.

Si te dicen que con 5 colores diferentes podemos hacer 10 banderas tricolores probablemente dudarías un poco.

Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ¿cuántos números de tres cifras, diferentes, por supuesto, puedo formar? Un número es diferente de otro si tiene una cifra distinta o el orden de sus cifras es diferente. 321 y 123 son números distintos aunque tengan las mismas cifras.

Con los datos anteriores podríamos formar 20 números diferentes.

¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse los 25 alumnos de la clase en los pupitres?

Si te dicen que de muchas, te quedas igual, pero si te dicen que de

$15_4 511.210_3 043.331_2 000.000_1 000.000$  maneras diferentes quizá no lo creas, sí, el número tiene 26 cifras. Parece imposible.

La Teoría Combinatoria es la parte de Matemáticas que se encarga de crear grupos de datos, objetos, etc., y además de llevar a cabo los cálculos necesarios.

Entre las diferentes formas que hay para llevar a cabo estos agrupamientos tenemos las: ***Variaciones, Permutaciones y Combinaciones.***

Antes de comenzar a estudiar la formación de los distintos grupos es fundamental que sepas:

¿A qué se llama **factorial** de un número?

**Factorial** de un número es el producto de todos los factores decrecientes a partir de él hasta llegar a la unidad.

El factorial de un número se escribe  **$k!$**  (siendo  $k$  cualquier número entero positivo)

Ejemplo:

Factorial de 3, se escribe  **$3!$**  y se lee **factorial de tres** y no, tres factorial.

El valor de  $3!$  es el producto de los factores decrecientes a partir de 3 hasta llegar a 1:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

**18.1** ¿Cuánto vale el factorial de 5?

**Respuesta: 120**

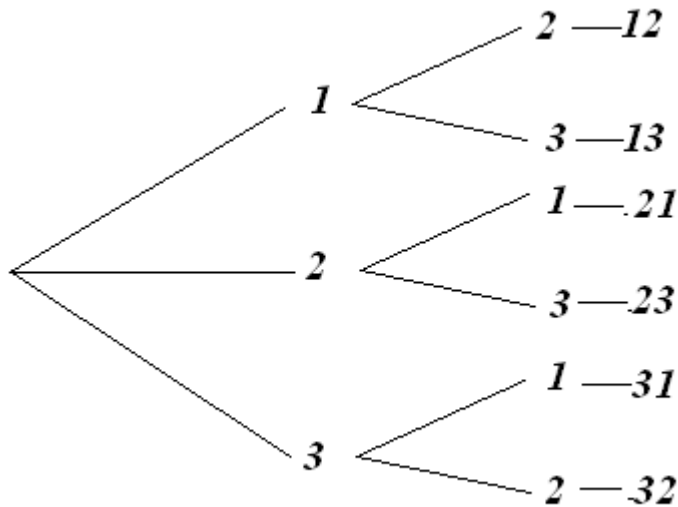
VARIACIONES SIN REPETICIÓN  $V_m^n$  o  $V_{m,n}$

Llamamos variaciones a los distintos grupos de elementos que podemos formar tomados de  $n$  en  $n$  de un total de  $m$  elementos.

Ejemplo:

¿Cuántos grupos de 2 cifras ( $n$ ) podemos formar con las tres primeras cifras ( $m$ )?

Sirviéndonos de un diagrama de árbol podemos hacer:



Los grupos de 2 elementos son: 12, 13, 21, 23, 31 y 32

Vemos que con 3 cifras podemos formar 6 números diferentes de dos.

Con  $m = \{a, b, c, d, e\}$  tomados de 3 en 3, es decir,  $n = 3$  ¿cuántos grupos diferentes o variaciones puedo hacer?

1	abc	bac	Cab	Dab	eab
2	abd	bad	Cad	Dac	eac
3	abe	bae	Cae	Dae	ead
4	acb	Bca	Cba	DbA	eba
5	acd	bcd	Cbd	Dbc	ebc
6	ace	Bce	Cbe	Dbe	ebd
7	adb	bda	Cda	Dca	eca
8	adc	bdc	Cdb	Dcb	ecb
9	ade	bde	Cde	Dce	ecd
10	aeb	Bea	Cea	Dea	eda
11	aec	Bec	Ceb	Deb	edb
12	aed	bed	Ced	Dec	edc

Compruebo que puedo hacer 60 variaciones.

Dirás con toda razón que hacer un trabajo de éstos lleva mucho tiempo y que siempre estás corriendo el riesgo de cometer equivocaciones. Tienes razón, lo que sucede es que casi nunca nos interesa ver los grupos que se pueden formar sino **cuántos** se pueden hacer.

Por simple observación comprobamos en el primer ejemplo que con 3 elementos tomados de 2 en 2 hemos formado 6 grupos. Es decir, con  $m = 3$  y  $n = 2$  hemos obtenido 6 variaciones.

Si al valor de  $m$  multiplicas por el *siguiente valor inferior a él* (3) **en una unidad** ( $m - 1$ ) que es ( $n$ ) 2, y el número de factores es igual al valor de  $n$  (dos factores) las Variaciones de 3 elementos tomados de dos en dos es  $= 3 \times 2 = 6$ .

Esto se escribe:

$$V_m^n = m(m - 1)$$

$$V_3^2 = 3(3 - 1) = 3 \times 2 = 6$$

También podemos escribir:

$$V_{m,n} = m(m - 1)$$

$$V_{3,2} = 3(3 - 1) = 3 \times 2 = 6$$

**18.2** Con las cifras {1, 2, 3, 4} ¿cuántos números de 3 cifras puedo formar?

**Respuesta:**  $V_4^3 = 4(4 - 1)(4 - 2) = 4 \times 3 \times 2 = 24$  números diferentes

Solución

$$m = 4$$

$$n = 3$$

A partir de 4 ( $m$ ) tomo tres ( $n$ ) factores decrecientes de unidad en unidad a partir de 4.

**Variaciones de 4 elementos de orden 3**  $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

$$V_4^3 = 4(4 - 1)(4 - 2) = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

**18.3** Con las 5 ( $m$ ) primeras letras del alfabeto ¿cuántas palabras de 3( $n$ ) letras puedo formar?

**Respuesta: 60**

Solución

El valor de  $m = 5$

El valor de  $n = 3$

$$V_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

***Fórmula general de las  $V_m^n$***

Para saber el valor de  $V_5^2$  multiplicamos  $5 \times 4$ , es decir, dos factores decrecientes de unidad en unidad, que, generalizando podemos escribir:  $m(m-1)$

Para saber el valor de  $V_5^3$  multiplicamos  $5 \times 4 \times 3$ , es decir, tres factores decrecientes de unidad en unidad, que, generalizando podemos escribir:  $m(m-1)(m-2)$

Para saber el valor de  $V_5^4$  multiplicamos  $5 \times 4 \times 3 \times 2$ , es decir, cuatro factores decrecientes de unidad en unidad, que, generalizando podemos escribir:  $m(m-1)(m-2)(m-3)$

En estos tres ejemplos puedes ver que el número de elementos ( $m$ ) es el primer factor, cada uno de los que le siguen van decreciendo de unidad en unidad. En último factor observamos que el valor ***que se le resta a  $m$***  equivale al valor de  ***$n$  menos 1***.

¿Cuál es el último factor de  $V_{10}^8$ ?

Representando con puntos los valores de los factores intermedios será:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times (10 - (8 - 1)) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times (10 - 8 + 1) = \\ = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 3$$

Comprobamos:

$V_{10}^8$  será igual a 8 factores decrecientes de unidad en unidad a partir de 10:

$$V_{10}^8 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

Como ves, 8 factores decrecientes de unidad en unidad a partir de 10.

La fórmula de  $V_m^n$  será:

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-(n-1))$$

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)$$

**18.4** ¿Cuántas formas diferentes pueden ocupar una fila de 10 sillones 5 personas?

**Respuesta: 5040 posiciones**

**18.5** ¿Cuántos partidos de fútbol de la primera división del fútbol del español se juegan en una temporada?. Por si no lo sabes, por ahora, la primera división la componen 20 equipos.

**Respuesta: 380 partidos**

VARIACIONES CON REPETICIÓN (VR)  $\Rightarrow VR_m^n$

Se trata de variaciones de  $m$  elementos de orden  $n$  en las que los grupos se diferencian uno de otro, en tener un elemento distinto o en el orden de colocación pero que podamos repetir los elementos, por ejemplo:

*aab aba baa*

son grupos diferentes porque se diferencian en el orden de colocación de sus elementos.

Si tomamos las cinco vocales de dos en dos veamos cuantas variaciones con repetición podemos hacer:

	A	E	I	O	U
1	aa	ea	ia	Oa	ua
2	ae	ee	ie	Oe	ue
3	ai	ei	ii	Oi	ui
4	ao	eo	io	Oo	uo
5	au	eu	iu	Ou	uu

Si tenemos unos cartones, cada uno con una vocal, podemos extraer dos veces la misma vocal.

Cada grupo ves que se diferencia en tener un elemento distinto o en el orden de colocación.

Por cada vocal conseguimos 5 grupos de 2 vocales cada grupo. En total la  $VR_5^2 = 25$

Los grupos que podemos obtener en el caso de  $VR_5^3$  son los siguientes:

	A	E	I	O	U
1	aaa	eea	iaa	oaa	Uaa
2	aae	eae	iae	oae	Uae
3	aa <i>i</i>	eai	iai	oai	Uai
4	aa <i>o</i>	eao	iao	oao	Uao
5	aa <i>u</i>	eau	iau	oau	Uau
6	aea	eea	iea	oea	Uea
7	aee	eee	iee	oee	Uee
8	aei	eei	iei	oei	Uei
9	aeo	eeo	ieo	oeo	Ueo
10	aeu	eeu	ieu	oeu	Ueu
11	aia	eia	iaa	oia	Uia
12	aie	eie	iae	oie	Uie
13	a <i>ii</i>	e <i>ii</i>	iii	oii	Uii
14	aio	eio	iao	oio	Uio
15	aiu	eiu	iau	oiu	Uiu
16	aoa	eo <i>a</i>	ioa	ooa	Uoa
17	aoe	eo <i>e</i>	ioe	ooe	Uoe
18	aoi	eo <i>i</i>	ioi	ooi	Uoi
19	ao <i>o</i>	eo <i>o</i>	ioo	ooo	Uoo
20	ao <i>u</i>	eo <i>u</i>	iou	oou	Uou
21	aua	eua	iaa	oua	Uua
22	au <i>e</i>	eue	iae	oue	Uue
23	au <i>i</i>	eui	iai	oui	Uui
24	au <i>o</i>	euo	iao	ouo	Uuo
25	au <i>u</i>	euu	iau	ouu	Uuu

El escribir todos los grupos es una tarea un poco más complicada que en el caso anterior.

Por cada letra hemos conseguido 25 variaciones, luego el total de grupos de 3 elementos es  $25 \times 5 = 125$ :

$$VR_5^3 = 125$$

Cuanto mayor es el valor de  $n$  mayor será el número de grupos.

Observa si las 5 vocales las agrupamos de 4 en 4:

	A	E	I	O	U
1	aaaa	aaaa	iaaa	oaaa	uaaa
2	aaae	eaee	iaee	oaae	uaee
3	aaai	eaai	iaai	oaa	uaai
4	aaa	ea	ia	oa	ua
5	aa	ea	ia	oa	ua
6	aa	ea	ia	oa	ua
7	aa	ea	ia	oa	ua
8	aa	ea	ia	oa	ua
9	aa	ea	ia	oa	ua
10	aa	ea	ia	oa	ua
11	aa	ea	ia	oa	ua
12	aa	ea	ia	oa	ua
13	aa	ea	ia	oa	ua
14	aa	ea	ia	oa	ua
15	aa	ea	ia	oa	ua
16	aa	ea	ia	oa	ua
17	aa	ea	ia	oa	ua
18	aa	ea	ia	oa	ua
19	aa	ea	ia	oa	ua
20	aa	ea	ia	oa	ua
21	aa	ea	ia	oa	ua
22	aa	ea	ia	oa	ua
23	aa	ea	ia	oa	ua
24	aa	ea	ia	oa	ua
25	aa	ea	ia	oa	ua
26	aa	ea	ia	oa	ua
27	aa	ea	ia	oa	ua
28	aa	ea	ia	oa	ua
29	aa	ea	ia	oa	ua
30	aa	ea	ia	oa	ua
31	aa	ea	ia	oa	ua
32	aa	ea	ia	oa	ua
33	aa	ea	ia	oa	ua
34	aa	ea	ia	oa	ua
35	aa	ea	ia	oa	ua
36	aa	ea	ia	oa	ua
37	aa	ea	ia	oa	ua
38	aa	ea	ia	oa	ua
39	aa	ea	ia	oa	ua
40	aa	ea	ia	oa	ua
41	aa	ea	ia	oa	ua
42	aa	ea	ia	oa	ua
43	aa	ea	ia	oa	ua
44	aa	ea	ia	oa	ua
45	aa	ea	ia	oa	ua
46	aa	ea	ia	oa	ua
47	aa	ea	ia	oa	ua
48	aa	ea	ia	oa	ua
49	aa	ea	ia	oa	ua
50	aa	ea	ia	oa	ua

51	aiaa	eiaa	iaaa	oiaa	uiaa
52	aiae	eiae	iaae	oiae	uiae
53	aiai	eiai	liai	oiai	uiai
54	aiao	eiao	iaao	oiao	uiao
55	aiau	eiau	iaau	oiau	uiau
56	aiea	eiea	ieea	oiea	uiea
57	aiee	eiee	ieee	oiee	uiee
58	aiei	eiei	liei	oiei	uiei
59	aieo	eieo	ieeo	oieo	uieo
60	aieu	eieu	ieeu	oieu	uieu
61	aiia	eiia	liia	oiia	uiia
62	aiie	eiie	liie	oiie	uiie
63	aiii	eiie	liii	oiie	uiii
64	aiio	eiio	liio	oiio	uiio
65	aiiu	eiio	liiu	oiio	uiiu
66	aioa	eioa	iooa	oioa	uioa
67	aioe	eioe	iooe	oioe	uioe
68	aioi	eioi	lioi	oioi	uioi
69	aioo	eioo	iooo	oioo	uioo
70	aiou	eiou	ioou	oiou	uiou
71	aiua	eiua	iuua	oiua	uiua
72	aiue	eiue	iuue	oiue	uiue
73	aiui	eiui	liui	oiui	uiui
74	aiuo	eiuo	iuuo	oiuo	uiuo
75	aiuu	eiuu	iuuu	oiuu	uiuu
76	aoaa	eoaa	ioaa	ooaa	uoa
77	aoae	eoae	ioae	ooae	uoae
78	aoai	eoai	ioai	ooai	uoai
79	aoao	eoao	ioao	ooao	uoao
80	aoau	eoau	ioau	ooau	uoau
81	aoea	eo	ioea	ooea	uo
82	aoee	eo	ioee	ooee	uo
83	aoei	eo	ioei	ooei	uo
84	aoeo	eo	ioeo	ooeo	uo
85	aoeu	eo	ioeu	ooeu	uo
86	aoia	eoia	ioia	ooia	uoia
87	aoie	eoie	ioie	ooie	uoie
88	aoii	eoii	ioii	ooii	uoi
89	aoio	eoio	ioio	ooio	uoi
90	aoiu	eo	ioiu	ooiu	uoi
91	aooa	eo	iooa	oooa	uoo
92	aooe	eo	iooe	oooe	uoo
93	aooi	eo	iooi	oooi	uoo
94	aooo	eo	iooo	oooo	uoo
95	aoou	eo	ioou	ooou	uoo
96	aoua	eo	ioua	ooua	uou
97	aoue	eo	ioue	ooue	uou
98	ao	eo	io	oo	uou
99	ao	eo	io	oo	uou
100	ao	eo	io	oo	uou
101	auaa	eu	iu	ou	uu
102	auae	eu	iu	ou	uu
103	auai	eu	iu	ou	uu
104	auao	eu	iu	ou	uu

105	auau	euau	iuau	ouau	uuau
106	auua	euua	iuua	ouua	uuua
107	auue	euue	iuue	ouue	uuue
108	auui	euui	iuui	ouui	uuui
109	auuo	euuo	iuuo	ouuo	uuuo
110	auuu	euuu	iuuu	ouuu	uuuu
111	auia	euia	iuia	ouia	uuia
112	auie	euie	iuie	ouie	uuie
113	auii	euui	iuui	ouui	uuui
114	auio	euio	iuio	ouio	uuio
115	auiu	euui	iuui	ouui	uuui
116	auoa	euoa	iuoa	ouoa	uuoa
117	auoe	euoe	iuoe	ouoe	uuoe
118	auoi	euoi	iuoi	ouoi	uuoi
119	auoo	euoo	iuoo	ouoo	uuoo
120	auou	euou	iuou	ouou	uuou
121	auua	euua	iuua	ouua	uuua
122	auue	euue	iuue	ouue	uuue
123	auui	euui	iuui	ouui	uuui
124	auuo	euuo	iuuo	ouuo	uuuo
125	auuu	euuu	iuuu	ouuu	uuuu

El total de grupos vemos que son  $125 \times 5 = 625$  variaciones con repetición:

$$VR_5^4 = 625$$

En los problemas, casi siempre, te van a preguntar el número de variaciones no cuales son.

La resolución es muy simple. Fíjate bien:

Hemos calculado que:

$$VR_5^2 = 25$$

$$VR_5^3 = 125$$

$$VR_5^4 = 625$$

Si observas un poco te darás cuenta que si elevas el número de elementos al orden, es decir, al número de los elementos por grupo obtenemos el resultado:

$$VR_5^2 = 25 = 5^2$$

$$VR_5^3 = 125 = 5^3$$

$$VR_5^4 = 625 = 5^4$$

**18.6** ¿Cuál es el número de variaciones con repetición que puedo conseguir con las 6 primeras cifras tomadas de 4 en 4?

**Respuesta: 1296**

Solución

$$VR_6^4 = 6^4 = 1296$$

### PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

Partiendo de un número  $m$  de elementos, llamamos permutaciones a los distintos grupos que podemos formar con los  $m$  elementos entrando todos los elementos en cada grupo.

Un grupo de otro se diferencia en el orden de colocación de sus elementos.

Tiene cierto parecido con las variaciones, su diferencia es que  $m$  y  $n$  son iguales.

Según lo que acabas de leer podemos escribir:

$$P_m = V_m^m = m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-m+1)$$

Vemos que las permutaciones de  $m$  elementos es igual al producto de  $m$  factores decrecientes a partir de  $m$  de unidad en unidad hasta llegar a 1.  $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Con las 5 primeras cifras podemos hacer 120 números distintos:

1	12345	15324	24513	34125	42315	51423
2	12354	15342	24531	34152	42351	51432
3	12435	15423	25134	34215	42513	52134
4	12453	15432	25143	34251	42531	52143
5	12534	21345	25314	34512	43125	52314
6	12543	21354	25341	34521	43152	52341
7	13245	21435	25413	35124	43215	52413
8	13254	21453	25431	35142	43251	52431
9	13425	21534	31245	35214	43512	53124
10	13452	21543	31254	35241	43521	53142
11	13524	23145	31425	35412	45123	53214
12	13542	23154	31452	35421	45132	53241
13	14235	23415	31524	41235	45213	53412
14	14253	23451	31542	41253	45231	53421
15	14325	23514	32145	41325	45312	54123
16	14352	23541	32154	41352	45321	54132
17	14523	24135	32415	41523	51234	54213
18	14532	24153	32451	41532	51243	54231
19	15234	24315	32514	42135	51324	54312
20	15243	24351	32541	42153	51342	54321

Tenemos 6 columnas de 20 permutaciones cada una, es decir,  $20 \times 6 = 120$  permutaciones.

Nos interesa saber el número de permutaciones y no la composición de cada grupo, lo que es complicado y tedioso.

**18.7** Con las cinco primeras letras del abecedario ¿cuántas permutaciones puedo hacer?

**Respuesta: 120**

Solución

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

**18.8** En una mesa rectangular ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse 12 personas a comer?

**Respuesta: 479 001.600**

### PERMUTACIONES CON REPETICIÓN $PR_n^{x,y,z}$

En el caso de las permutaciones sin repetición calculábamos el factorial del número de elementos.

Cuando hablamos de permutaciones con repetición nos referimos a que hay un elemento o más de uno que se repiten.

Observa las permutaciones que podemos hacer con las letras de la palabra *sal*:

*sal, sla, asl, als, lsa, las*

Es decir,  $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Como ves, no se repite ningún elemento en la palabra *sal*.

En el caso de repetir algún elemento, dos veces, como en el caso de la palabra *ala*, en la que el elemento *a* se repite dos veces, escribiríamos:  $PR_3^2$

Para saber las permutaciones que podemos hacer cuando un elemento, como en el caso de la palabra *ala* se repite dos veces, tenemos que dividir el total de las permutaciones de los *n*

elementos entre las permutaciones del número del elemento que se repite.

En este caso, como el elemento **a** se repite 2 veces tendremos:

$$PR_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$$

Los grupos que podemos formar son: *ala, aal, laa*

Las permutaciones que podemos hacer con la palabra **mesa** son:

$$P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

*mesa, meas, msea, msae, maes, mase, emsa, emas, esma, esam, eams, easm, smea, smae, sema, seam, same, saem, ames, amse ames, aesm, asme, asem*

Las permutaciones que podemos hacer con la palabra **masa** serán:

$$PR_3^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

*masa, maas, msaa, amsa, amas, asma, asam, aams, aasm, smaa sama, saam*

Las permutaciones que podemos hacer con la palabra **banana** teniendo en cuenta que el elemento **a** se repite 3 veces y el elemento **n** dos veces tendríamos  $PR_6^{3,2}$ .

En este caso, a factorial de 6 le tenemos que dividir por factorial de 3 y factorial de 2:

$$PR_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{720}{12} = 60$$

*banana, banaan, bannaa, baanna, baanan, baaann, bnaana, bnaaan, bnanaa, bnnaaa*  
*banana, abnaan, abnnaa, abanna, abanan, abaann, anbana, anbaan, anbnaa, anabna*  
*anaban, ananba, ananab, anaabn, anaanb, annbaa, annaba, annaab, aabnna, aabnan*

*aabann, aanbna, aanban, aannba, aannab, aanabn, aananb,*  
*aaabnn, aaanbn, aaannb*  
*nbaana, nbaaan, nbanaa, nbnaaa, nabana, nabaan, nabnaa,*  
*naabna, naaban, naanba*  
*naanab, naaabn, naaanb, nanbaa, nanaba, nanaab, nnbaaa,*  
*nnabaa, nnaaba, nnaaab*

**18.9** ¿Cuántas permutaciones puedo obtener con la palabra *paloma*?

**Respuesta: 360**

**18.10** Calcula el número de permutaciones que puedes hacer con las cifras que componen el número 113335.

**Respuesta: 60**

COMBINACIONES SIN REPETICIÓN  $C_m^n$  o  $C_{m,n}$

Son los grupos que podemos hacer de entre  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  diferenciándose, un grupo de otro, en tener *algún elemento distinto.*

Si disponemos de los elementos: {a, b, c, d} y los tomamos de 2 en dos, los grupos que podemos formar de modo que cada grupo se diferencie de los demás en tener *un elemento distinto* son:

$$C_4^2 \Rightarrow ab, ac, ad, bc, bd, cd \Rightarrow \mathbf{6}$$

Las combinaciones de {a, b, c, d} tomados de 3 en tres son:

$$C_4^3 \Rightarrow abc, abd, acd, bcd \Rightarrow \mathbf{4}$$

Las combinaciones de {a, b, c, d, e} tomados de 4 en 4 son:

$$C_5^4 \Rightarrow abad, abce, abde, acde, bcde \Rightarrow \mathbf{5}$$

Si te fijas bien, ves que  $C_4^2 \Rightarrow \mathbf{6}$

$$C_4^3 \Rightarrow \mathbf{4}$$

$$C_5^4 \Rightarrow \mathbf{5}$$

$$\text{Las } V_4^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{Las } P_2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{Si dividimos } \frac{V_4^2}{P_2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ que corresponden a } C_4^2$$

$$\text{Las } V_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\text{Las } P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\text{Si dividimos } \frac{V_4^3}{P_3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4 \text{ que corresponden a } C_4^3$$

$$\text{Las } V_5^4 \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

$$\text{Las } P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\text{Si dividimos } \frac{V_5^4}{P_4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{24} = 5 \text{ que corresponden a } C_5^4$$

$$\text{De modo general, podemos decir que: } C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)}{n!}$$

Vamos a analizar el numerador para obtener una fórmula sencilla. Imagina que tenemos el siguiente producto indicado:

$$5 \times 4 \times 3$$

¿qué le falta para que sea 5!?

Como sabemos que el factorial de un número lo componen una serie de factores decrecientes, partiendo de él, de unidad en unidad hasta llegar a la unidad, notamos que falta el factor 2 y si queremos escribirlo, también el 1:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

En la expresión:  $m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)$ , vemos que los factores a partir de  $m$  van decreciendo de unidad en unidad, pero al llegar al factor  $(m-n+1)$  se detiene.

¿Cuál es el factor siguiente a  $(m-n+1)$  que valga una unidad menos?

Lógicamente  $m-n+1-1 = m-n$

El factor siguiente a  $(m-n)$  que valga una unidad menos sería:  $(m-n-1)$ .

¿Cuánto vale  $4! \times 5$  ó  $5 \times 4!$ ?

Si multiplico  $5 \times 4!$  veo que es igual a  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

¿Cuánto vale  $6 \times 5!$ ?

Será lo mismo que  $6!$ .

¿Cuánto vale  $m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)(m-n)!$ ?

El producto ha comenzado con el factor  $m$  y han ido decreciendo de unidad en unidad hasta llegar a  $(m-n+1)$  el siguiente factor es  $(m-n)$ , y si le multiplico por  $(m-n)!$  ahora he enlazado desde  $m$  hasta  $1$  decreciendo de unidad en unidad, es decir,  $m!$ .

$$\text{En } C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)}{n!}$$

multiplico al numerador y al denominador por  $(m-n)!$  no varía el valor del cociente, y sin embargo, he reducido el tamaño de la fórmula de las combinaciones porque me quedará:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)(m-n)!}{n!(m-n)!}$$

$$\text{Lo que equivale a: } C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

**18.11** Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 ¿cuántos productos diferentes puedo conseguir si las tomo de 2 en dos y cuáles son los factores?

**Respuesta: 21 productos y son:**  $1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 4, 1 \times 5, 1 \times 6, 1 \times 7$   
 $2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5, 2 \times 6, 2 \times 7, 3 \times 4, 3 \times 5, 3 \times 6, 3 \times 7, 4 \times 5, 4 \times 6, 4 \times 7$   
 $5 \times 6, 5 \times 7$  y  $6 \times 7$

Solución

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}; C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

**Nota.-** *Cada grupo debe tener un elemento distinto para que los productos sean diferentes. El orden de los factores no cambia el resultado del producto.*

**18.12** Con los pesos de 6 alumnos de 56, 60, 62, 63, 66 y 69 kilos tomándolos de tres en tres ¿cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse?

**Respuesta: 20 pesadas**

**18.13** ¿Cómo puedes escribir de otro modo:  $5 \times 4!$ ?

**Respuesta: 5!**

**18.14** Responde, como en el ejercicio anterior a qué son iguales:

$$3 \times 2!$$

$$2 \times 1!$$

$$1 \times 0!$$

**Respuestas: 3!, 2! y 1!**

**Nota. Por convenio 0! vale 1**

COMBINACIONES CON REPETICIÓN  $CR_m^n$

Cada grupo puede tener elementos repetidos diferenciándose uno de otro en tener un elemento distinto.

La alteración del orden de los elementos no se admite combinaciones.

Ejemplos:

Tenemos 4 elementos {a, b, c, d} los tomamos de dos en dos, se admite la repetición de elementos.

$$\text{Si no hubiera repetición, las } C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 6$$

Los grupos sin repetición son:

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd \quad (6)$$

Los grupos con repetición tomados de dos en dos serían:

$$aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd \quad (10)$$

Los grupos sin repetición tomados de tres en tres serían:

$$abc, abd, acd, bcd \quad (4)$$

Los grupos con repetición tomados de tres en tres serían:

$$aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add, bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd, ccc, ccd, cdd, ddd \quad (20)$$

La fórmula que responde a estos resultados es:

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

$$CR_{4,2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$CR_{4,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

**18.15** ¿De cuántas formas puedo agrupar los números 1, 2, 3, 4 y 5 constando cada uno por 3 elementos?

Se desea ver cada número formado.

**Respuesta: 35 números que son:**

111 112 113 114 115 122 123 124 125 133 134 135 144  
145 155 222 223 224 225 233 234 235 244 245 255 333

334 335 344 345 355 444 445 455 555

**18.16** ¿Cuántas combinaciones puedes hacer con las cifras 1, 2, 3, 4, y 5 tomadas de 3 en 3 de modo que el número 3 se halle en todos los grupos?

**Respuesta: 6**

Solución

Con las cinco cifras puedes hacer 10 números diferentes de 3 cifras cada uno:

$$C_{10}^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Cada uno de los 10 números tiene 3 cifras lo que hacen un total de 30 cifras.

De las 30 cifras, 6 corresponderán al 1, 6 al 2, 6 al 3, etc., y esto quiere decir, que habrá:  $\frac{30}{5} = 6$  números que contienen a cada

una de ellas: 123 124 125 134 135 145 234 235 245 345

Podrás comprobar 6 números contienen el 1

6 números contienen el 2

6 números contienen el 3

6 números contienen el 4

6 números contienen el 5

**Problemas de combinatoria:**

**18.17** ¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 personas alrededor de una mesa?

**Respuesta: 3,628.800**

**18.18** ¿Cuántas quinielas de fútbol tengo que rellenar para sacar una de 14?

**Respuesta: 4,782.969 quinielas**

Solución

En cada partido, un equipo puede: ganar, empatar o perder y esto se repite en 14 partidos, luego tendremos:

$$VR_3^{14} = 3^{14} = 4,782.969 \text{ quinielas}$$

**18.19** ¿Cuántos números de cinco cifras diferentes y distintos a 54321 puedo formar con las que componen dicho número?

**Respuesta: 119 números**

Solución

Se trata de las  $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Como en estos 120 números se encuentra 54321 y a éste no hay que incluirlo tendremos  $120 - 1 = 119$

**18.20** Con las cifras 1, 2 y 3 ¿cuántos números de 4 cifras puedo formar? Si tienes paciencia escríbelos.

**Respuesta: 81 números**

Solución

Al ser números de 4 cifras algunas se tienen que repetir por disponer de tres solamente. Como un número para ser distinto de otro es suficiente que varíen el orden de colocación de sus cifras nos encontramos ante variaciones con repetición:  $VR_m^n = VR_3^4 = 81$

Los números son: 1111 1112 1113 1121 1122 1123 1131  
1132 1133 1211 1212 1213 1221 1222 1223 1231 1232  
1233 1311 1312 1313 1321 1322 1323 1331 1332 1333  
2111 2112 2113 2121 2122 2123 2131 2132 2133 2211  
2212 2213 2221 2222 2223 2231 2232 2233 2311 2312  
2313 2321 2322 2323 2331 2332 2333 3111 3112 3113  
3121 3122 3123 3131 3132 3133 3211 3212 3213 3221  
3222 3223 3231 3232 3233 3311 3312 3313 3321 3322  
3323 3331 3332 3333

**18.21** Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7  
1º ¿cuántos números de 4 cifras podemos hacer?

2°.- ¿Cuántos de los números anteriores comienzan con la cifra 2?

3° ¿Cuántos números del problema **18.21** comienzan por 12.....?

**Respuestas: 1ª) 840 números**

**2ª) 120 números**

**3ª) 20 números**

Solución

1)  $V_m^n = V_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

2) Comienzan por 2:  $V_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

Ahora, el número de elementos disminuye una unidad ya que excluimos el dos y cada número tendrá 3 elementos porque al 2 ya lo tenemos en cuenta.

3) Comienzan por 12:  $V_5^2 = 5 \times 4 = 20$

Si los números han de ser de 4 cifras y las dos primeras son 12, nos quedan 5 cifras para hacer números de 2 cifras para colocarlas detrás de 12...y de este modo, los números sean de 4 cifras como:  
1234 1235 1236 1237 1243 1245 1246 1247 1253 1254  
1256 1257 1263 1264 1265 1267 1273 1274 1275 1276

**18.22** Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 ¿Cuántos números de 4 cifras puedo escribir que comiencen por 2 y terminen en 5?

**Respuesta: 20 números**

Solución

Los números tienen el formato: 2 ? ? ? ? 5 , es decir, que el primero y último ya los tengo ocupados, me quedan 5 cifras para formar números de 2 cifras cada uno:  $V_5^2 = 5 \times 4 = 20$  que rellenarían los espacios cubiertos con el signo ?.

**18.23** Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 ¿Cuántos números de 4 cifras puedo escribir que no contengan el ni el 3?

**Respuesta: 120 números**

Solución

En realidad debo formar grupos de 4 elementos con 5 elementos y que se diferencien en tener un elemento distinto o en el orden de colocación:  $V_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

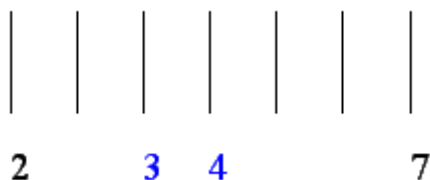
**18.24** Con el texto del problema anterior ¿cuántos y cuáles son los números de 4 cifras que puedes formar que comiencen por 2 acaben en 7 y no contengan ni el 3 ni el 4?

**Respuesta: 6 números y son 2157, 2167, 2517, 2567, 2617 y 2657**

Solución

De las 7 posiciones o lugares tengo ocupadas 4.

Cada grupo ha de tener 4 cifras de las que 2 tengo ocupadas con el 2 y el 7.



Me quedan libres 3 posiciones a ser ocupadas por 2 cifras cada vez.

Tendremos:  $V_3^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

## NÚMEROS COMBINATORIOS

Otro modo de representar las  $C_{m,n} = C_m^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  es

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = C_m^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

A  $\binom{m}{n}$  le podemos considerar como a las combinaciones que podemos hacer como  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ .

El número combinatorio  $\binom{m}{n}$  leemos: “*m sobre n*”

Ejemplo de aplicación:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 6$$

Propiedades de los números combinatorios:

1) *Cualquier número entero positivo sobre cero es igual a 1*

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{0!m!} = \frac{m!}{1 \times m!} = 1$$

2) *Cualquier número entero positivo m sobre 1 es igual a m*

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{m!}{1(m-1)!} = \frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

3) *Cuando la suma de los números que representan el número de elementos por grupo es igual al número de elementos, podemos decir que los dos números combinatorios son iguales:*

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$$
$$m - n + n = m$$

Lo comprobamos:

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(m-m+n)!} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}$$

4) *La suma de dos números combinatorios con el mismo número de elementos y los números que representan los elementos por grupo son consecutivos es otro número combinatorio en el que el número de elementos aumenta en una unidad y el número de elementos por grupo es el del mayor:*

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Lo comprobamos:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} =$$

El común denominador es :  $(n+1)!(m-n)!$

$$\text{Haciendo operaciones tenemos : } \frac{(n+1)m! + m!(m-n)}{(n+1)!(m-n)!}$$

Sacamos factor común, en el numerador a,  $m!$ :

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)m! + m!(m-n)}{(n+1)!(m-n)!} &= \frac{m!(n+1+m-n)}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{m!(m+1)}{(n+1)!(m-n)!} \\ &= \frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} = \binom{m+1}{n+1} \end{aligned}$$

**18.25** Los números combinatorios  $\binom{5}{3}$  y  $\binom{5}{2}$  ¿son iguales?.

Razona.

**Respuesta:** Sí, son iguales porque la suma de los elementos de los dos números combinatorios por grupo, es igual al número de elementos.

**18.26** Los números combinatorios  $\binom{m}{1}$  y  $\binom{m}{0}$  ¿son iguales?.

**Respuesta:** No, el 1º es igual a  $m$  y el 2º es igual  $1$ .

**18.27** ¿Cuánto vale la suma de los números combinatorios

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} ?$$

**Respuesta: 20 ó  $\binom{6}{3}$**

**18.28** ¿Son iguales  $\binom{5}{0}$  y  $\binom{5}{5}$  ?

**Respuesta: Sí.**

### UNA APLICACIÓN IMPORTANTE DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

Disponemos los números combinatorios del modo siguiente:

$$\begin{array}{c} \binom{1}{0} \binom{1}{0} \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\ \binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6} \end{array}$$

.....

En la primera fila el número de elementos de cada número combinatorio vale 1, el número de elementos por grupo 0.



Observa que la suma de los exponentes de cada término es igual a la potencia a la que está elevado el binomio. En el ejemplo los exponentes de  $a$  y  $b$  en cada término suman 3.

**18.29** En  $(a + b)^5$  ¿podrías escribir el cuarto término?

**Respuesta:**  $\binom{5}{3}a^2b^3$  o  $10a^2b^3$

**Solución**

Como los números combinatorios comienzan por cero para el número de elementos por grupo, el tercer término llevará un 2, y al término  $n$  le corresponderá  $n - 1$ .

El coeficiente será  $\binom{5}{3}$  ó 10.

El primer término del binomio llevará por exponente la diferencia entre los valores de  $m$  y  $n$  mientras que el segundo término llevará el valor  $n$ .

**18.30** En  $(a - b)^5$  ¿podrías escribir el cuarto término?

**Respuesta:**  $-\binom{5}{3}a^2b^3$  ó  $-10a^2b^3$

**Solución**

Al tener signo + el primer término, el segundo tendrá menos, y así, se van alternando, de modo que los términos que ocupan lugar impar son positivos y son negativos los que ocupen un lugar par.

**18.31** ¿Cuánto vale el término que ocupa el lugar 23 en el desarrollo del binomio  $(x - y)^{30}$ ?

**Respuesta:**  $\binom{30}{22}x^8y^{22}$

